Aufgabe 1 *(Rektifizierbar oder nicht)*
Entscheiden Sie (mit Nachweis), ob folgende Kurven $c : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ rektifizierbar sind.

(i) $c(t) = \begin{cases} (t^2, t^2), & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}t, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t\right), & \text{für } t \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$

(ii) $c(t) = \begin{cases} \left(2 + t, t^2 \sin \frac{1}{t}\right), & \text{für } t \in (0,1] \\ (2,0), & \text{für } t = 0 \end{cases}$

(iii) $c(t) = \begin{cases} \left(t, t \sin \frac{1}{t}\right), & \text{für } t \in (0,1] \\ (0,0), & \text{für } t = 0 \end{cases}$

Aufgabe 2 *(Archimedische Spirale)*
Betrachten Sie eine in Polarkoordinaten gegebene Kurve

$$\alpha(t) = (r(t)\cos\phi(t), r(t)\sin\phi(t)), \quad t \in I = [a,b],$$

wobei $r \in C^1(I, \mathbb{R}^+)$ und $\phi \in C^1(I)$.

(a) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve α.

(b) Spezialisieren Sie auf $r(t) = \phi(t) = t$, fertigen Sie eine Zeichnung an, und berechnen Sie die Bogenlänge $L(\alpha|_{[\pi,2\pi]})$.

(c) Parametrisieren Sie die Kurve $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \beta(t) = (e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t)$, nach der Bogenlänge.

Aufgabe 3
Sei $c \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ eine reguläre Kurve. Zeigen Sie: Ist $\tilde{c} = c \circ \phi$ eine Umparametrisierung mit $\phi \in C^1(\tilde{I}, I)$, $\phi' \neq 0$, und sind $c \in C^k(I, \mathbb{R}^n)$ und $\tilde{c} \in C^k(\tilde{I}, \mathbb{R}^n)$ für ein $k \geq 2$, so ist $\phi \in C^k(\tilde{I}, I)$.

Aufgabe 4 *(Approximation der Bogenlänge)*
Sei $Z = \{t_0, \ldots, t_N\}$ eine Zerlegung des Intervalls $I = [a,b]$. Die Feinheit $\Delta(Z)$ dieser Zerlegung ist definiert durch

$$\Delta(Z) = \max_{i=1,\ldots,N} (t_i - t_{i-1}).$$

Zeigen Sie: Ist $c \in C^0(I, \mathbb{R}^n)$ rektifizierbar mit $L(c) < \infty$, so gilt für jede Folge Z_k von Zerlegungen von I mit Feinheit $\Delta(Z_k) \to 0$, dass $L_{Z_k}(c) \to L(c)$.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt.
Abgabe ist am Mittwoch, den 11.05.11.